Sujet 2 — Arbitrage de volatilité

Prérequis

Ce sujet nécessite que le pricer du Sujet 1 soit fonctionnel : on suppose disposer d'un modèle capable de produire, pour un strike et une maturité donnés, un prix théorique d'option, à partir d'un jeu de paramètres calibré.

Principe général

L'idée de l'arbitrage de volatilité est de comparer deux estimations de la volatilité d'un même actif : celle impliquée par le modèle (calibré sur l'ensemble de la surface, ou sur un historique) et celle impliquée par le prix de marché d'une option précise, puis de trader l'écart entre les deux.

Plus précisément :

- Le marché cote un prix $V_{\text{marché}}$ pour une option donnée. En inversant la formule de Black-Scholes (c'est-à-dire en cherchant le σ tel que le prix Black-Scholes de l'option égale $V_{\text{marché}}$), on obtient la *volatilité implicite de marché* $\sigma_{\text{implicite}}$. C'est la convention standard utilisée par l'ensemble des intervenants de marché pour coter les options, indépendamment du modèle qu'ils utilisent en interne.
- Le pricer du Sujet 1 permet, lui, de calculer un prix théorique V_{pricer} pour cette même option, à partir des paramètres calibrés du modèle (rough Heston + Hull-White + intensité de défaut). Pour pouvoir comparer ce prix à la cotation de marché sur une échelle commune, on convertit également ce prix théorique en volatilité implicite *au sens Black-Scholes*, en l'inversant de la même façon : on obtient $\sigma_{\text{modèle}}$. Il ne s'agit donc pas d'un paramètre du modèle lui-même, mais d'une volatilité Black-Scholes équivalente, qui permet de comparer modèle et marché sur la même unité (en pratique, on compare ainsi la *surface de volatilité implicite* générée par le modèle à la surface de volatilité implicite cotée par le marché).

Le signal de trading proposé est alors le suivant : si $\sigma_{\text{modèle}} > \sigma_{\text{implicite}}$, le modèle estime que l'option devrait valoir plus cher que ce que le marché en pense : l'option est jugée sous-évaluée. On se positionne alors *long gamma* (typiquement en achetant l'option et en delta-hedgeant, cf. Sujet 3), ce qui permet de bénéficier d'un scénario où la volatilité réalisée s'avère effectivement plus élevée que ce qu'anticipe le marché. Inversement, si $\sigma_{\text{modèle}} < \sigma_{\text{implicite}}$, on se positionne *short gamma*.

Le signal brut ne suffit pas

Un écart $\sigma_{\text{modèle}} \neq \sigma_{\text{implicite}}$ observé ponctuellement ne constitue pas en soi une preuve de mauvaise valorisation par le marché : cet écart peut tout aussi bien provenir d'une erreur de calibration

du modèle, d'un bruit de microstructure (bid-ask spread, faible liquidité sur ce strike précis), ou simplement du fait que le modèle est imparfaitement spécifié. Il faut donc construire un signal statistiquement plus robuste avant de conclure à un réel mispricing. Quelques pistes à creuser :

- Étudier la persistance de l'écart dans le temps (un écart qui se maintient sur plusieurs jours est plus significatif qu'un écart isolé sur une seule observation) ;
- Normaliser l'écart par une mesure de son incertitude (par exemple un z-score de l'écart $\sigma_{\text{modèle}} - \sigma_{\text{implicite}}$ par rapport à sa volatilité historique, plutôt que de raisonner sur sa valeur brute) ;
- Vérifier la cohérence de l'écart sur l'ensemble de la surface (plusieurs strikes et maturités voisins) plutôt que sur un seul point, un signal isolé sur un unique couple (strike, maturité) étant plus susceptible d'être du bruit ;
- Tenir compte des coûts de transaction et de la liquidité réelle de l'option avant de considérer le signal comme exploitable ;
- Backtester la stratégie de façon rigoureuse (hors échantillon), en gardant à l'esprit que si le modèle est mal calibré de façon systématique, le signal peut être biaisé en permanence dans la même direction sans que cela corresponde à une réelle opportunité de marché.

Remarque générale

Comme pour les autres sujets, la démarche présentée ici n'est qu'un point de départ indicatif. Il est attendu que l'équipe approfondisse la question de la construction d'un signal statistiquement significatif (tests d'hypothèse, seuils de décision, gestion du risque de modèle) bien au-delà de ce qui est esquissé ici.