Sujet 3 — Delta hedging et trading de convexité

Prérequis

Ce sujet nécessite que le pricer du Sujet 1 soit fonctionnel, car il faudra en dériver (analytiquement ou numériquement) les grecques nécessaires à la stratégie.

Rappel des grecques utilisées

Pour une option de valeur $V(S_t, t, \dots)$, on note :

- $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$: la sensibilité de la valeur de l'option à une variation du sous-jacent ;
- $\Gamma = \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$: la sensibilité du Delta à une variation du sous-jacent, c'est-à-dire la *convexité* de l'option par rapport à S ;
- $\Theta = \dfrac{\partial V}{\partial t}$: la décroissance de la valeur de l'option au cours du temps, toutes choses égales par ailleurs (souvent négative pour un acheteur d'option).

Par un développement d'Itô (ou de Taylor à l'ordre 2 en S), la variation de valeur de l'option s'écrit

$$dV = \Delta\, dS + \frac{1}{2}\Gamma\, dS^2 + \Theta\, dt + (\text{termes liés aux autres facteurs de risque}). \tag{1}$$

Principe du delta hedging

On construit un portefeuille $\Pi_t = V_t - \Delta_t\, S_t$, composé d'une option et d'une position opposée de Δ_t actions du sous-actjacent, choisie de sorte que le portefeuille soit localement insensible à une petite variation de S_t (portefeuille *delta-neutre*). Comme Δ_t dépend de S_t et de t, il varie en permanence : il faut donc *rebalancer dynamiquement* la couverture, c'est-à-dire acheter ou vendre des actions à intervalles réguliers (ou selon un seuil de tolérance sur le Delta) pour maintenir la neutralité. Ce rebalancement a un coût réel (spread bid-ask, frais de courtage, impact de marché) qui doit être pris en compte : rebalancer trop souvent érode le P&L via les coûts de transaction, rebalancer trop rarement laisse le portefeuille s'exposer au risque de Delta non couvert. Trouver la bonne fréquence (ou le bon seuil de déclenchement) de rebalancement fait partie intégrante du sujet.

D'où viennent les gains ?

Une fois le portefeuille delta-neutre, son P&L résiduel ne dépend plus (au premier ordre) des mouvements directionnels du sous-jacent, mais de sa *convexité*, c'est-à-dire du terme en Γ. Intuitivement,

la stratégie consiste à parier sur l'écart entre :

- la **volatilité réalisée** σ_{RV} : la volatilité effectivement observée sur le sous-jacent sur la période considérée (calculée a posteriori à partir de la trajectoire réalisée de S_t) ;
- la **volatilité implicite** σ_{IV} : la volatilité utilisée pour calculer le prix de l'option (et donc le Delta et le Gamma) au moment de sa mise en place, typiquement la volatilité implicite de marché ou celle du modèle calibré.

Attention : on trouve très fréquemment dans la littérature l'expression du P&L d'un portefeuille delta-hedgé sous la forme

$$dP\&L \approx \frac{1}{2}\Gamma S^2 \left(\sigma_{RV}^2 - \sigma_{IV}^2\right) dt, \tag{2}$$

qui indique que le portefeuille gagne de l'argent si la volatilité réalisée dépasse la volatilité implicite utilisée pour le pricing (et inversement). Cette formule est **spécifique au cadre Black-Scholes** : elle repose sur l'hypothèse d'une volatilité constante ou déterministe, d'un hedging en temps continu, et de l'absence de sauts et de coûts de transaction. Or le pricer retenu dans le Sujet 1 comporte de la volatilité stochastique (rough Heston), un taux stochastique (Hull-White) et des sauts (processus de défaut) : la formule ci-dessus **n'est donc pas valable telle quelle**. Il faudra reprendre le développement d'Itô sous la dynamique complète du modèle choisi (ce qui fera apparaître, entre autres, des termes de risque de volatilité non couvert par le seul Delta – le *Vega* – ainsi qu'un terme lié aux sauts, qui n'est pas capturé par une couverture en Delta/Gamma continue) pour obtenir l'expression correcte du P&L résiduel, et en déduire les conditions sous lesquelles la stratégie est réellement profitable.

Remarque générale

Comme pour les autres sujets, ceci n'est qu'une trame indicative. Un travail de recherche est attendu pour aller au-delà : décomposition rigoureuse du P&L sous le modèle complet, choix de la fréquence de rebalancement optimale (arbitrage risque/coût), prise en compte du Vega et du risque de saut, etc.