Sujet 1 — Pricer multi-facteurs (vol rugueuse, taux stochastiques, risque de défaut)

Objectif

L'objectif de ce sujet est de construire un pricer d'options sous un modèle qui combine trois sources d'incertitude usuellement traitées séparément : la volatilité stochastique (et rugueuse), le taux d'intérêt stochastique, et le risque de saut/défaut. Le modèle sous-jacent proposé pour le sous-jacent S_t est le suivant :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t\,dt + \sqrt{V_t}\,dW_t + (J-1)\,dN_t \tag{1}$$

où r_t est le taux court, V_t la variance instantanée, N_t un processus de comptage (typiquement un processus de Poisson à intensité stochastique) qui modélise l'arrivée de sauts, et J la taille (aléatoire) du saut relatif au prix, de sorte que $S_{t^-} \to J \cdot S_{t^-}$ lorsqu'un saut survient.

Remarque importante : l'intensité de défaut λ_t n'apparaît pas explicitement dans l'équation ci-dessus, et c'est normal. Elle intervient à travers le processus N_t lui-même : N_t est un processus de Poisson *doublement stochastique* (ou processus de Cox), c'est-à-dire un processus de Poisson dont l'intensité λ_t est elle-même un processus stochastique. Formellement, le compensateur de N_t vérifie $\mathbb{E}[dN_t \mid \mathcal{F}_t] = \lambda_t\,dt$. Le défaut de l'actif (ou un choc extrême assimilable à un défaut) peut alors être modélisé comme le premier saut de N_t, ou via un temps d'arrêt $\tau = \inf\{t : \int_0^t \lambda_s\,ds \geq E\}$ où E suit une loi exponentielle de paramètre 1, indépendante du reste. C'est cette construction qu'il faudra préciser et implémenter, en choisissant une dynamique pour λ_t (par exemple un processus CIR, ou un processus à sauts lui-même).

Les trois briques du modèle

Le taux court r_t — modèle de Hull-White. Il s'agit d'un modèle de taux à un facteur, extension gaussienne du modèle de Vasicek, défini par

$$dr_t = (\theta(t) - a\,r_t)\,dt + \sigma_r\,dW_t^r, \tag{2}$$

où a est la vitesse de retour à la moyenne, σ_r la volatilité du taux, et $\theta(t)$ une fonction déterministe calibrée de manière à reproduire exactement la courbe des taux zéro-coupon observée sur le marché. Le principal intérêt du modèle est de fournir des formules fermées pour les obligations zéro-coupon et pour certaines options de taux, ce qui facilite la calibration.

La variance V_t — rough Heston. Le modèle de Heston classique suppose $dV_t = \kappa(\theta - V_t)\,dt + \xi\sqrt{V_t}\,dW_t^V$. Le modèle *rough Heston* remplace cette dynamique brownienne standard par une dynamique gouvernée par un noyau de type fractionnaire, avec un paramètre de Hurst $H < 1/2$ (typiquement $H \approx 0.1$), qui a la particularité de mieux reproduire le comportement empirique de la surface de volatilité implicite au voisinage de la maturité (explosion du skew court terme observée sur les marchés réels). Concrètement, V_t est défini via une équation de Volterra plutôt qu'une EDS classique, ce qui complique la simulation (les incréments de V_t ne sont plus markoviens au sens usuel) : il faudra se renseigner sur les méthodes de simulation adaptées (schémas de type hybride, approximation par une somme finie de processus CIR, etc.).

Le processus de défaut λ_t. Comme expliqué plus haut, λ_t pilote l'intensité des sauts. Un choix simple et standard est un processus CIR : $d\lambda_t = \kappa_\lambda(\theta_\lambda - \lambda_t)dt + \sigma_\lambda\sqrt{\lambda_t}\,dW_t^\lambda$, ce qui garantit la positivité de l'intensité.

Estimation des paramètres

Une fois le modèle défini, il faut calibrer l'ensemble des paramètres (ceux de Hull-White, du rough Heston, et du processus d'intensité) de sorte que les prix d'options générés par le pricer soient les plus proches possible des prix observés sur le marché, pour un ensemble de strikes et de maturités. Trois grandes familles de méthodes sont envisageables, à choisir en fonction du cas d'usage :

- **Optimisation locale** (Levenberg-Marquardt, BFGS, L-BFGS, Gauss-Newton) : ces méthodes convergent rapidement mais nécessitent un bon point de départ, faute de quoi elles risquent de rester bloquées dans un minimum local. Elles sont particulièrement adaptées à une calibration *quotidienne* où les paramètres calibrés la veille servent de point de départ (warm start), sous l'hypothèse que les paramètres n'évoluent que faiblement d'un jour à l'autre.
- **Optimisation globale** (differential evolution, CMA-ES, essaims particulaires) : plus coûteuses en temps de calcul, elles explorent plus largement l'espace des paramètres et sont préférables lorsqu'on ne dispose pas d'un a priori fiable sur les paramètres (première calibration, changement de régime de marché).
- **Inférence bayésienne** : plutôt que d'estimer un unique jeu de paramètres optimal $\hat{\theta}$, on cherche la loi a posteriori complète $p(\theta \mid \text{données})$, ce qui permet de quantifier l'incertitude de calibration (et donc, in fine, l'incertitude sur les prix et les grecques). Les méthodes usuelles sont les algorithmes MCMC tels que Hamiltonian Monte Carlo ou NUTS (No-U-Turn Sampler), ou des méthodes séquentielles comme le Sequential Monte Carlo, plus adaptées à une mise à jour en continu de la loi a posteriori au fil des nouvelles données de marché.

Remarque générale

La démarche décrite ci-dessus n'est qu'indicative. Chaque étape (choix précis des dynamiques, méthode de simulation, fonction de coût de calibration, choix de l'optimiseur, gestion des contraintes sur les paramètres, etc.) nécessite un véritable travail de recherche bibliographique en amont : il est attendu que l'équipe aille chercher les références académiques pertinentes, compare plusieurs approches, et n'hésite pas à s'écarter de ce qui est proposé ici si une meilleure solution est identifiée.