Prévoir la courbe des taux souverains d'un pays de votre choix

Du modèle de Hull–White à ses extensions : calibrage, prévision hors échantillon et P&L

1 Avertissement

Ce document n'est pas un énoncé au sens classique. L'intérêt de ce projet est d'acquérir de l'expérience, par la lecture de l'état de l'art et par votre autoformation aux méthodes présentées. Au regard de votre expérience et de vos résultats intermédiaires, vous pouvez et êtes encouragés à modifier ou adapter la stratégie, et à redéfinir les objectifs.

2 Contexte et motivation

Les taux d'intérêt servent à actualiser tous les flux futurs : évaluer une obligation, un prêt, un dérivé, un engagement d'assureur. Ils ne sont pas constants et évoluent de manière aléatoire ; pour les anticiper, il faut un modèle de leur dynamique. Le modèle de **Hull–White** (1990) est l'un des plus utilisés en pratique : le taux court r_t est attiré vers un niveau moyen avec une vitesse de retour à la moyenne κ, et le modèle se cale exactement sur la courbe des taux observée grâce à un niveau moyen dépendant du temps $\theta(t)$. Ses prix d'obligations zéro-coupon sont explicites.

Ses limites sont connues : une vitesse de retour à la moyenne et une volatilité constantes, une loi gaussienne symétrique, aucun régime. Des travaux récents proposent de remplacer κ par une fonction sinusoïdale du temps afin de capter des *cycles de long terme* observés dans les rendements du Trésor américain (Jha, 2025). Ce sujet vous demande d'**aller plus loin** : reproduire cette idée, la confronter aux obligations d'État d'un **pays de votre choix** (zone euro, États-Unis, Royaume-Uni, etc.), et surtout **proposer, implémenter et comparer d'autres modifications** du modèle (section 6.4).

Une difficulté scientifique centrale traverse tout le sujet : **Hull–White est un modèle de valorisation**, calé sur des prix de marché, donc sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$. Prévoir des taux demande la dynamique sous la mesure réelle $\mathbb{P}$, qui diffère par la prime de risque. Un modèle parfaitement calé sur la courbe d'aujourd'hui ne prévoit pas forcément bien celle de demain ; l'un des objectifs est de le mesurer honnêtement.

Critère en une phrase. Chaque mois, on prend des positions longues ou courtes sur des obligations souveraines synthétiques à 2, 5 et 10 ans selon la variation de rendement prévue par le modèle ; le P&L simulé est le portage, plus le roll-down, plus l'effet duration et convexité, moins les coûts de transaction.

3 Type de projet et projet associé

— **Type principal :** quant research (construction, calibrage et comparaison de modèles de taux).

— **Projet appliqué associé (intégré) :** backtest d'une stratégie obligataire pilotée par les prévisions (section 6.6), avec P&L simulé et comparaison aux prévisions naïves. Pour les équipes qui le souhaitent, une variante *risk* est possible : mesurer la VaR/ES d'un portefeuille d'obligations d'État à partir de scénarios simulés par le modèle calibré.

4 Objectifs

4.1 Objectifs (initiaux, révisables)

1. **Choisir un pays et constituer le jeu de données** (section 5) : collecte, nettoyage, statistiques descriptives (ACP des variations de rendements, volatilité par maturité, spectre). Une comparaison de deux pays est une extension bienvenue.
2. **Implémenter le modèle de référence** : Hull–White gaussien (prix zéro-coupon explicites) et sa version à retour à la moyenne sinusoïdal, en validant chaque brique (voir étape 1).
3. **Calibrer** sur la coupe transversale à une date (mesure $\mathbb{Q}$) *et* estimer la dynamique réelle sur la série temporelle (mesure $\mathbb{P}$).
4. **Choisir au moins deux extensions** dans le menu (dont une non gaussienne ou à régimes), les implémenter et les comparer.
5. **Prévoir hors échantillon** les rendements à 1, 3, 6 et 12 mois pour plusieurs maturités, par validation glissante (walk-forward), face à des étalons.
6. **Convertir les prévisions en P&L** (section 6.6) et conclure : quelle modification apporte quelque chose, où, et quand ?

5 Données

5.1 Sources

— **Principe :** pour presque tous les grands pays, la banque centrale ou l'agence de la dette publie une courbe de rendements souverains à maturités fixes (typiquement 1 à 30 ans), calculée à partir des obligations cotées. Choisissez un pays dont la série quotidienne est téléchargeable gratuitement, avec un historique d'au moins 20 ans. *Les identifiants de séries, les dates de début et la méthode de construction sont à vérifier par l'équipe : le comité ne les a pas figés.*

— **Exemples de sources à explorer : États-Unis** : courbe des rendements du Trésor (site du Trésor américain) et courbe zéro-coupon de Gürkaynak–Sack–Wright via la Réserve fédérale / FRED ; **zone euro** : portail de données de la BCE (courbes de rendements de la zone euro), et pour chaque pays membre sa banque centrale ou son agence de la dette, par exemple en **Belgique** la base NBB.Stat de la Banque nationale (rendements d'OLO à durée résiduelle fixe de 1 à 30 ans, interface web et API SDMX) ; **Allemagne** : Bundesbank ; **Royaume-Uni** : Bank of England (courbes de rendements des gilts).

— **Compléments :** taux directeur et taux au jour le jour de la banque centrale du pays (contrôle du taux court), inflation pour les extensions macro.

— **Validation croisée :** reproduire d'abord l'article de référence sur les taux du Trésor américain (FRED).

Coût : nul pour l'ensemble de ces sources.

5.2 Qualité et limites

— **Ce ne sont pas des cotations brutes.** Les rendements à durée résiduelle fixe sont interpolés : la courbe est déjà lissée par la méthode de l'institution émettrice (à lire dans sa documentation). Calibrer un modèle sur une courbe lissée, c'est calibrer sur une sortie de modèle ; la structure en facteurs (niveau, pente, courbure) y est plus nette que dans le marché.

— **Pas de taux court.** La maturité minimale est souvent d'un an (parfois trois mois) : le taux court r_t n'est pas directement observé. Deux solutions : un proxy (maturité courte, biaisé), ou mieux, traiter r_t comme un *état latent* estimé par filtre de Kalman. Le taux directeur et le taux au jour le jour de la banque centrale peuvent servir de contrôle.

— **Dette souveraine $\neq$ taux sans risque.** Pour un émetteur autre que le plus sûr de sa zone, les rendements incorporent une prime de crédit et de liquidité (par exemple l'écart avec l'Allemagne dans la zone euro), qui varie fortement en période de stress (crise de la dette souveraine de 2011–2012). Ce choix de pays est donc un choix de modélisation à discuter.

— **Taux négatifs.** Dans plusieurs pays (zone euro, Japon, Suisse), les rendements ont été négatifs pendant des années avant 2022 : les modèles log-normaux (Black–Karasinski) ou à racine carrée non décalés (CIR) ne s'appliquent pas tels quels.

— **Échantillon court pour un cycle long.** Si l'historique disponible couvre environ trois décennies, un cycle de 22 ans n'y apparaît qu'une fois et demie : *une composante périodique n'y est presque pas identifiable* et peut être un artefact de l'ajustement (voir section 6.7).

— **Changements de méthode de construction** de la courbe, jours fériés, valeurs manquantes : à contrôler dans le temps.

6 Grandes étapes et idées de stratégies

6.1 Étape 1 – Le modèle de référence

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, le taux court suit

$$\mathrm{d}r_t = \kappa(t)\big(\theta(t) - r_t\big)\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W_t^{\mathbb{Q}}.$$

Le cas standard est κ, σ constants et $\theta(t)$ calé sur la courbe initiale. Le modèle étant linéaire gaussien, le prix zéro-coupon est exponentiel-affine :

$$P(t,T) = A(t,T)\,e^{-B(t,T)\,r_t},$$

avec B solution de l'équation de Riccati linéaire $\partial_t B = \kappa(t)B - 1$, $B(T,T) = 0$, soit

$$B(t,T) = \int_t^T \exp\Big(-\int_t^s \kappa(u)\,\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}s, \qquad \ln A(t,T) = -\int_t^T \Big[\kappa(s)\theta(s)B(s,T) - \tfrac{1}{2}\sigma(s)^2 B(s,T)^2\Big]\mathrm{d}s.$$

Pour κ, θ, σ constants, on retrouve $B = (1 - e^{-\kappa\tau})/\kappa$ et $\ln A = (\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2})(B - \tau) - \frac{\sigma^2 B^2}{4\kappa}$ avec $\tau = T - t$. L'ajustement exact à la courbe de la date 0 donne, pour κ constant, $\theta(t) = f(0,t) + \frac{1}{\kappa}\partial_t f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}(1 - e^{-2\kappa t})$, où $f(0,\cdot)$ est la courbe des taux forward instantanés (par exemple un ajustement de Nelson–Siegel de la courbe observée).

Variante sinusoïdale. Avec $\kappa(t) = \kappa_0 + A\sin(\omega t + \varphi)$, on a $\int_t^s \kappa = \kappa_0(s-t) + \frac{A}{\omega}\big[\cos(\omega t + \varphi) - \cos(\omega s + \varphi)\big]$, de sorte que $B(t,T)$ est une **intégrale unidimensionnelle explicite**, et $\ln A$ une intégrale double. *Le modèle reste gaussien : une simulation Monte-Carlo n'est pas nécessaire pour valoriser un zéro-coupon, une quadrature suffit.* Elle élimine le bruit de simulation, qui contamine sinon la fonction de perte pendant le calibrage et peut masquer le bénéfice d'un paramètre supplémentaire. Vérifiez-le : validez la quadrature contre une simulation Monte-Carlo (schéma d'Euler–Maruyama, avec un grand nombre de trajectoires) puis contre la formule fermée dans le cas $A = 0$. Le Monte-Carlo reste indispensable pour les extensions non affines.

> **Retour à la moyenne négatif.** Si $A > \kappa_0$, alors $\kappa(t) < 0$ sur une partie du cycle : le « retour à la moyenne » devient une dynamique instable. Décidez d'une contrainte (par exemple $0 \le A < \kappa_0$) ou assumez et analysez ce comportement ; dans tous les cas, justifiez-le.

6.2 Étape 2 – Mesure $\mathbb{Q}$ contre mesure $\mathbb{P}$: de la valorisation à la prévision

Posons $\mathrm{d}W_t^{\mathbb{Q}} = \mathrm{d}W_t^{\mathbb{P}} + \lambda\,\mathrm{d}t$, où λ est le prix de marché du risque (supposé constant ; précisez votre convention de signe). La dynamique réelle est alors $\mathrm{d}r_t = \kappa(t)(\theta^{\mathbb{P}}(t) - r_t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W_t^{\mathbb{P}}$ avec $\theta^{\mathbb{P}} = \theta^{\mathbb{Q}} + \lambda\sigma/\kappa$. Pour des paramètres constants,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[r_{t+h} \mid r_t] = \theta^{\mathbb{P}} + (r_t - \theta^{\mathbb{P}})e^{-\kappa h}, \qquad \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big[y(t+h,\tau)\big] = \frac{B(\tau)\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[r_{t+h}] - \ln A(\tau)}{\tau},$$

où $y(t,\tau) = -\ln P(t,t+\tau)/\tau$ est le rendement à maturité τ (affine en r dans un modèle gaussien, d'où l'exactitude de la seconde formule). Trois prévisions de natures différentes sont à confronter :

1. la prévision **implicite des forwards** : avec $\theta(t)$ calé exactement et des paramètres constants, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[r_T] = f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}(1 - e^{-\kappa T})^2$; elle ne contient ni prime de risque ni information supplémentaire ;
2. la prévision **sous** $\mathbb{P}$, avec $\theta^{\mathbb{P}}$ et λ estimés sur la série temporelle ;
3. les **étalons** (section 6.5).

Duffee (2002) montre que des modèles affines à prime de risque usuelle prévoient souvent moins bien que la simple marche aléatoire : l'enjeu n'est pas de « gagner » à tout prix, mais de documenter où et pourquoi.

6.3 Étape 3 – Calibrage et estimation

— **Coupe transversale (mesure $\mathbb{Q}$) :** minimiser une perte entre les rendements du modèle et ceux observés aux maturités $\{1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 30\}$ ans. *Choix à justifier :* minimiser des erreurs de *prix* pondère fortement les longues maturités (car $\delta P \approx -\tau P\, \delta y$) ; des erreurs de *rendement* en points de base pèsent toutes les maturités de façon plus homogène. Algorithme dérivable ou non (Nelder–Mead, L-BFGS), points de départ multiples, bornes sur les paramètres.

— **Volatilité sans options :** la volatilité historique des variations de rendement par maturité identifie κ et σ (dans le modèle, $\operatorname{Var} \Delta y(\tau) \approx (\sigma B(\tau)/\tau)^2 \Delta t$) sans exiger de données de caps ou de swaptions.

— **Série temporelle (mesure $\mathbb{P}$) :** filtre de Kalman sur l'état latent r_t ; équation d'observation $y_t(\tau_i) = -\ln A(\tau_i)/\tau_i + B(\tau_i) r_t/\tau_i + \varepsilon_{it}$, équation d'état exacte

$$r_{t+\Delta} = \theta^{\mathbb{P}}(1 - e^{-\kappa\Delta}) + e^{-\kappa\Delta} r_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim \mathcal{N}\Big(0, \tfrac{\sigma^2(1-e^{-2\kappa\Delta})}{2\kappa}\Big),$$

maximum de vraisemblance. L'estimation de κ est connue pour être biaisée (vers un retour à la moyenne trop rapide) sur des échantillons courts : testez-le par simulation.

— **Bruit de Monte-Carlo :** si vous simulez, utilisez des graines communes (*common random numbers*) et des variables antithétiques pour que la fonction de perte soit déterministe.

6.4 Étape 4 – Menu d'extensions du modèle

L'article de référence propose **une** modification (κ sinusoïdal). Voici d'autres pistes, de l'abordable à l'ambitieux. Chacune doit être justifiée par un défaut observé du modèle standard sur vos données (par exemple : résidus de calibrage structurés, volatilité qui varie par épisodes, taux négatifs, rupture de pente).

Id	Modification	Idée et ce qu'elle capte	Traitabilité / risque
M0	Hull–White standard	Étalon du modèle : κ, σ constants, $\theta(t)$ calé.	Forme fermée.
M1	$\kappa(t) = \kappa_0 + A\sin(\omega t + \varphi)$	Cycles de long terme (Jha, 2025) ; ajout d'une phase φ et d'une période ω estimée plutôt que fixée.	Quadrature. Cycle peu identifiable sur 30 ans ; $\kappa < 0$ possible.
M2	$\sigma(t)$ constant par morceaux	Volatilité qui varie dans le temps (Hull–White, 1990) ; calibrée sur les volatilités historiques par maturité.	Quadrature. Nombre de paramètres.
M3	Deux facteurs gaussiens (G2++)	$r = x + y + \varphi(t)$ avec deux processus d'Ornstein–Uhlenbeck corrélés : pente et courbure, déformations non parallèles de la courbe (Brigo & Mercurio).	Forme fermée. Identification des deux vitesses ; Kalman multivarié.
M4	Modèles décalés (CIR++, Black–Karasinski décalé)	Non-gaussianité, volatilité dépendant du niveau, positivité *après décalage* pour gérer les taux négatifs.	CIR++ : formule semi-explicite (condition de Feller). BK : arbre ou MC.
M5	Régimes de Markov cachés	Paramètres (κ, θ, σ) pilotés par une chaîne de Markov cachée à K états (Hansen & Poulsen ; Erlwein & Mamon ; Ang & Bekaert) : périodes calmes et turbulentes, pivot de politique monétaire.	Filtre de Hamilton, EM. Risque de régimes instables.
M6	Volatilité stochastique	σ_t^2 suit un processus de type CIR : regroupement de volatilité.	Simulation seulement. Coûteux.
M7	Sauts aux dates de la BCE	Composante de sauts compensés aux dates de réunion de politique monétaire.	MC ; peu de dates pour calibrer.
M8	Niveau θ ancré sur la politique monétaire	$\theta(t) = a + b\, i_t^{\mathrm{BCE}}$ (ou inflation anticipée) : le niveau moyen suit un fondamental observable. Idée proposée par le comité, à tester.	Reste gaussien ; risque de causalité inversée.
M9	Correction par apprentissage statistique	Prévision = prévision du modèle + correction apprise (régression pénalisée, petit réseau) sur les résidus et sur les facteurs de courbe ; ou calibrage par réseau de neurones (cf. arXiv :2110.15133).	Surapprentissage ; il faut prouver le gain hors échantillon.

Paramètres de départ (indicatifs, non justifiés). Le calibrage doit s'accompagner d'une justification de chaque borne.

Paramètre	Symbole	Plage de départ
Maturités de calibrage (ans)	τ_i	$\{1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 30\}$
Vitesse de retour à la moyenne	κ ou κ_0	[0,02; 1]
Amplitude sinusoïdale / période / phase	A, $T_\omega = 2\pi/\omega$, φ	$[0, \kappa_0[$; [8; 30] ans ; $[0, 2\pi[$
Volatilité du taux court (par an)	σ	[0,002; 0,02]
Niveau moyen	θ	calé sur la courbe, ou $[-0{,}01;\ 0{,}06]$
Prix de marché du risque	λ	estimé (série temporelle)
Pas de temps	Δt	1/12 (prévision) ; 0,05 ou moins (simulation)
Horizons de prévision	h	1, 3, 6, 12 mois

6.5 Étape 5 – Protocole de prévision et d'évaluation

1. **Validation glissante (walk-forward)** : à chaque fin de mois t, calibrer avec les seules données $\leq t$, prévoir $\hat{y}_{t+h}(\tau)$ pour $\tau \in \{2, 5, 10\}$ ans, comparer au réalisé. Fenêtre croissante ou glissante : à justifier. Jeu de test final mis de côté.
2. **Étalons :** marche aléatoire (rendement inchangé), AR(1) par maturité, Nelson–Siegel dynamique de Diebold–Li, prévision issue des forwards (M0 calé exactement), Hull–White standard sous $\mathbb{P}$.
3. **Mesures :** RMSE et MAE en points de base, biais, précision directionnelle, test de Diebold–Mariano (avec correction d'autocorrélation de type HAC : les erreurs à horizon h qui se chevauchent sont autocorrélées). Séparer l'*ajustement dans l'échantillon* (coupe transversale) de la *prévision hors échantillon.*
4. **Épisodes de stress :** crises de dette, rendements négatifs ou nuls, normalisation monétaire à partir de 2022 (adaptez à votre pays) ; rapporter les erreurs par sous-période.

6.6 Étape 6 – De la prévision au P&L

Pour une obligation synthétique au pair de maturité τ, le rendement sur la période Δ (un mois) s'approche à l'ordre deux par

$$R_{t\to t+\Delta}(\tau) \;\approx\; y_t(\tau)\,\Delta \;-\; D(\tau)\,\big[y_{t+\Delta}(\tau-\Delta) - y_t(\tau)\big] \;+\; \tfrac{1}{2}\,C(\tau)\,\big[y_{t+\Delta}(\tau-\Delta) - y_t(\tau)\big]^2,$$

où le premier terme est le portage, la différence de rendements inclut le **roll-down** (la maturité résiduelle a raccourci), D est la duration modifiée et C la convexité. Une version plus fidèle revalorise l'obligation exactement avec la courbe zéro-coupon à $t + \Delta$.

Règle de position. À chaque date, position $w_t(\tau)$ proportionnelle à $-\big(\hat{y}_{t+h}(\tau) - y_t(\tau)\big)/\hat{\sigma}(\tau)$ (signal normalisé : on vend l'obligation si l'on prévoit une hausse de rendement), plafonnée, dimensionnée en risque (DV01). Variantes : aplatissement/pentification 2–10 ans pilotés par le facteur de pente d'un modèle à deux facteurs ; papillon 2–5–10 ans.

Coûts. Coût de transaction égal à la duration × demi-spread (en points de base de rendement) × $|\Delta w|$; l'ordre de grandeur du spread est une hypothèse à justifier.

Résultats à rapporter : courbe de P&L cumulé, ratio de Sharpe (déflaté du nombre de variantes testées), drawdown maximal, rotation, taux de réussite, contribution du portage par rapport à celle de la prévision. Comparer à la stratégie « toujours neutre » et à la stratégie guidée par la marche aléatoire.

6.7 Pièges classiques à éviter

- **Confusion $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$:** utiliser des paramètres calés sur des prix pour prévoir des taux réels sans prime de risque.
- **Bon ajustement $\neq$ bonne prévision :** un calibrage sur une seule date, avec quelques maturités et plusieurs paramètres, se fait presque parfaitement et n'a aucune valeur prédictive. Un gain d'ajustement obtenu en ajoutant des paramètres doit être confirmé hors échantillon et par un critère pénalisé (AIC/BIC).
- **Cycle fantôme :** chercher une période sur un échantillon qui n'en contient qu'un cycle et demi, puis la figer. Testez la stabilité de la période estimée selon la fenêtre, et comparez à une période tirée au hasard.
- **Look-ahead bias :** utiliser dans la prévision en t une courbe ou un paramètre qui n'est disponible qu'après t ; ajustement de $\theta(t)$ avec la courbe de la date de prévision *plus tard*.
- **Fuite de données (data leakage) :** choisir les hyperparamètres ou le nombre de régimes sur la période de test.
- **Surapprentissage et p-hacking :** multiplier maturités, horizons et variantes jusqu'à trouver une victoire sur l'étalon.
- **Bruit de Monte-Carlo dans le calibrage :** comparer deux modèles dont l'un est calibré sur une fonction de perte bruitée.
- **Chevauchement des horizons :** tests statistiques naïfs sur des erreurs autocorrélées.
- **Non-stationnarité :** les paramètres d'avant 2014 ne valent pas ceux d'après 2022.
- **Réalisme du P&L :** négliger les coûts, la liquidité, ou supposer qu'on peut transiger au rendement de clôture publié.

7 Références et pistes de lecture

- J. Hull, A. White, « Pricing interest-rate-derivative securities », *Review of Financial Studies*, 3(4), 1990.
- O. Vasicek, « An equilibrium characterization of the term structure », *Journal of Financial Economics*, 5, 1977.
- A. K. Jha, « A Sinusoidal Hull–White Model for Interest Rate Dynamics : Capturing Long-Term Periodicity in U.S. Treasury Yields », arXiv :2506.06317, 2025 (article de référence pour la modification sinusoïdale).
- D. Brigo, F. Mercurio, *Interest Rate Models – Theory and Practice*, 2e éd., Springer, 2006 (G2++, CIR++, calibrage).
- F. Black, P. Karasinski, « Bond and option pricing when short rates are lognormal », *Financial Analysts Journal*, 47(4), 1991. J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross, « A theory of the term structure of interest rates », *Econometrica*, 53, 1985.
- C. Nelson, A. Siegel, « Parsimonious modeling of yield curves », *Journal of Business*, 60, 1987. L. Svensson, « Estimating and interpreting forward interest rates : Sweden 1992–1994 », NBER WP 4871, 1994.
- F. Diebold, C. Li, « Forecasting the term structure of government bond yields », *Journal of Econometrics*, 130, 2006.
- G. Duffee, « Term premia and interest rate forecasting in affine models », *Journal of Finance*, 57(1), 2002.

— J.-C. Duan, J.-G. Simonato, « Estimating and testing exponential-affine term structure models by Kalman filter », *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 13, 1999.

— A. Hansen, R. Poulsen, « A simple regime switching term structure model », *Finance and Stochastics*, 4, 2000. C. Erlwein, R. Mamon, « An online estimation scheme for a Hull–White model with HMM-driven parameters », *Statistical Methods and Applications*, 2009. A. Ang, G. Bekaert, « Regime switches in interest rates », *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(2), 2002.

— G. Orlando, M. Bufalo, « Interest rates forecasting : Between Hull and White and the CIR# – How to make a single-factor model work », *Journal of Forecasting*, 2021 (modèle à facteur unique adapté aux taux négatifs, aux regroupements de volatilité et aux sauts).

— J. Patel, V. Russo, F. Fabozzi, « Using the right implied volatility quotes in times of low interest rates : an empirical analysis », *Finance Research Letters*, 25, 2018 (calibrage de Hull–White et de modèles décalés en taux négatifs).

— F. Diebold, R. Mariano, « Comparing predictive accuracy », *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 1995.

— D. Bailey, M. López de Prado, « The deflated Sharpe ratio », *Journal of Portfolio Management*, 40(5), 2014.

— Sources de données : banque centrale ou agence de la dette du pays choisi ; portail de données de la BCE ; FRED ; Trésor américain ; Bundesbank ; Bank of England.

8 Jalons et résultats intermédiaires attendus

Jalon	Livrable intermédiaire	Échéance
J1	Revue de littérature (Hull–White, article sinusoïdal, mesures $\mathbb{Q}/\mathbb{P}$, deux extensions pressenties) et plan de travail	Semaines 1–2
J2	Pays choisi (justifié) ; données collectées et nettoyées ; statistiques descriptives : ACP des variations de rendements, volatilité par maturité, spectre d'un rendement long, périodes de taux négatifs. Reproduction de l'article sur données américaines	Semaines 3–4
J3	Baseline bout en bout : Hull–White standard (forme fermée) calé en coupe transversale, prévision face à la marche aléatoire, premier P&L simpliste	Semaines 5–6
J4	Version sinusoïdale (quadrature) et au moins deux extensions ; validation glissante complète ; analyse de robustesse et des échecs	Semaines 7–9
J5	Livrable final : code reproductible, rapport, présentation	Semaine 10

Les échéances sont indicatives ; un point court et régulier avec un référent du comité est recommandé.

9 Prérequis et niveau de difficulté estimés

— **Niveau :** avancé ; équipe de 3 ou 4 étudiants ; environ 10 semaines.

— **Prérequis :** calcul stochastique de base (processus d'Ornstein–Uhlenbeck, équations différentielles stochastiques, changement de mesure au niveau intuitif), programmation Python ou Julia, statistiques (maximum de vraisemblance, séries temporelles). Le filtre de Kalman peut être appris en cours de projet.

— **Points durs :** distinguer valorisation et prévision, identifier honnêtement des paramètres sur un échantillon court, construire un protocole hors échantillon sans fuite.

10 Confidentialité

Ce document est un document de travail interne au comité scientifique et aux équipes de BlaCS-Scholes. Merci de ne pas le distribuer en dehors.