BLACS-SCHOLES

De la marche aléatoire à Black-Scholes

Comment déterminer le prix d'une option sans prédire l'avenir ?

Yesmine El Fehri
yesmine.el-fehri@student-cs.fr

Octobre 2026

Introduction

Lorsqu'on débute en finance, on a souvent une intuition assez naturelle : pour déterminer le prix d'un actif financier, il faudrait étudier son comportement passé, anticiper son évolution future et en déduire le prix auquel il devrait s'échanger.

Et si je vous disais qu'il est possible de déterminer le prix d'un produit financier sans avoir à prédire l'avenir du marché ?

C'est précisément l'une des idées fondamentales qui se cachent derrière le célèbre modèle de Black-Scholes.

L'objectif de cette newsletter est de comprendre comment on peut déterminer le prix d'un produit dérivé en construisant une stratégie de couverture qui permet, sous certaines hypothèses, de neutraliser les risques liés aux fluctuations du marché.

Pour y parvenir, nous commencerons par explorer quelques hypothèses fondamentales des marchés financiers, notamment l'hypothèse d'efficience des marchés. Nous introduirons ensuite un modèle simple dans lequel le prix d'un actif évolue selon une marche aléatoire.

Enfin, nous verrons comment, en faisant tendre le nombre de pas de cette marche vers l'infini, nous pouvons progressivement retrouver la célèbre équation de Black-Scholes.

Notre défi : comprendre d'où vient cette équation et pourquoi elle fonctionne, sans avoir recours à des mathématiques trop complexes.

1. Peut-on prédire les marchés ?

1.1 L'efficience des marchés

L'hypothèse d'efficience des marchés, formalisée par Eugene Fama en 1970, stipule que le prix d'un actif financier reflète les informations disponibles, selon le degré d'efficience du marché.

Dans sa forme semi-forte, cette hypothèse suppose que le prix d'un actif intègre l'ensemble des informations publiquement disponibles, y compris l'historique de ses cours.

Ainsi, exploiter le comportement passé d'un actif ou les informations publiques le concernant ne permet pas, en principe, d'obtenir systématiquement un avantage sur le marché.

Nous n'allons donc pas chercher à prédire les prix futurs à partir des données historiques. Nous allons plutôt adopter une approche probabiliste pour modéliser leurs fluctuations.

1.2 Une marche aléatoire

C'est dans ce contexte que l'on modélise l'évolution du prix d'un actif sur le marché par un modèle mathématique très simple.

Commençons d'abord par définir une marche aléatoire.

À retenir

Soit une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que :

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

On définit la marche aléatoire par :

$$\boxed{M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k}$$

avec $M_0 = 0$.

Même si nous ne pouvons pas prévoir la direction du prochain mouvement, nous pouvons étudier mathématiquement le comportement de cette marche aléatoire et les différents scénarios possibles.

À retenir

L'imprévisibilité des mouvements individuels n'empêche pas de construire un modèle mathématique pour étudier leur évolution.

Mais comment passer d'une simple marche aléatoire à un modèle décrivant l'évolution du prix d'une action ?

C'est ce que nous allons voir avec le modèle binomial de Cox–Ross–Rubinstein.

1.3 Une action qui monte ou descend : Modèle binomial

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la suite représentant le prix de l'action à l'instant n, avec $S_0 > 0$.

Supposons qu'à chaque étape, deux scénarios soient possibles : soit le prix de l'action augmente, soit il diminue.

On pose alors :

$$\forall n \geq 0, \qquad S_{n+1} = Y_{n+1} S_n$$

où $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires telles que :

$$\begin{cases} Y_n = u \text{ si } X_n = 1 \\ Y_n = d \text{ si } X_n = -1, \end{cases}$$

avec $u, d \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\boxed{0 < d < 1 < u.}$$

2. Du hasard au juste prix

2.1 Actifs sans risque et actifs risqués

On considère un marché financier simplifié composé de deux types d'actifs financiers :

Les actifs sans risque *(risk-free assets)* : ce sont des actifs dont l'évolution future est supposée connue avec certitude dans notre modèle.

C'est un peu comme lorsqu'on place de l'argent sur un compte épargne à taux fixe : on sait qu'après une année, notre capital sera multiplié par un facteur $1+r$, où r désigne le taux d'intérêt sans risque.

Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ la suite représentant la valeur d'une unité de l'actif sans risque. C'est une suite déterministe définie par récurrence :

$$\boxed{B_{n+1} = (1+r)B_n, \qquad B_0 = 1.}$$

On en déduit :

$$\boxed{B_n = (1+r)^n.}$$

Remarque 1. *Dans la réalité, un placement considéré comme sans risque peut néanmoins présenter certains risques. Imaginons, par exemple, que la banque dans laquelle tu as déposé ton argent fasse faillite : tu pourrais subir une perte si tes dépôts ne sont pas entièrement protégés.*

L'absence de risque est donc ici une hypothèse du modèle mathématique.

Remarque 2. *Le taux sans risque peut également être négatif ! Cela s'est notamment produit lorsque certaines banques centrales ont adopté des taux d'intérêt négatifs afin d'encourager les banques à prêter plutôt qu'à conserver leurs liquidités.*

Cela ne change pas la définition d'un actif sans risque : même si ton placement perd de la valeur, cette évolution reste connue à l'avance dans notre modèle.

Les actifs risqués *(risky assets)* : contrairement aux actifs sans risque, leur valeur future est incertaine. Leur évolution peut être modélisée mathématiquement, comme nous l'avons fait avec le prix de l'action S_n dans la partie précédente.

Mais les actions ne sont pas les seuls instruments financiers risqués. Il existe également des produits dont la valeur dépend de celle d'un autre actif : ce sont les **produits dérivés**.

Parmi eux, un instrument particulièrement intéressant va retenir notre attention : **l'option**.

2.2 Et si la liberté de choisir avait une valeur ?

Une option est un **produit dérivé**, c'est-à-dire un instrument financier dont la valeur dépend de celle d'un autre actif, appelé *actif sous-jacent*.

C'est un contrat qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (*call*) ou de vendre (*put*) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance, appelé *prix d'exercice* ou *strike* K.

Dans le cas d'une option européenne, ce droit ne peut être exercé qu'à une date prédéterminée, appelée *échéance* T.

Considérons une option d'achat européenne (*call*) d'échéance T et de strike K, dont le sous-jacent est l'action de prix (S_n).

À l'échéance, deux situations sont possibles :

— Si $S_T > K$, le détenteur exerce son droit d'acheter l'action au prix K, alors qu'elle vaut S_T sur le marché. Il réalise ainsi un gain de $S_T - K$.
— Si $S_T \leq K$, il n'a aucun intérêt à exercer son option, puisqu'il peut acheter l'action sur le marché à un prix inférieur ou égal à K. Son gain est donc nul.

Le gain à l'échéance, appelé *payoff*, s'écrit alors :

$$\boxed{C_T = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0).}$$

Remarque 3. *Une option* ***européenne*** *ne peut être exercée qu'à son échéance, tandis qu'une option* ***américaine*** *peut être exercée à tout moment jusqu'à son échéance.*

Fait intéressant : pour un call américain sur une action ne versant aucun dividende, lorsque le taux sans risque est positif ou nul, il n'est jamais strictement avantageux d'exercer son droit avant l'échéance !

En revanche, un exercice anticipé peut devenir optimal lorsque l'action verse des dividendes, ou, même sans dividendes, lorsque les taux d'intérêt sont négatifs.

2.3 Construire un portefeuille : le couple (M, Δ)

On définit un portefeuille financier par le couple

$$P = (M, \Delta),$$

où M représente le capital initial placé dans l'actif sans risque et Δ le nombre d'actions détenues.

Le capital placé dans l'actif sans risque évolue selon :

$$M_n = M(1+r)^n,$$

où r est le taux d'intérêt sans risque par période.

On suppose que les actions détenues ont pour prix unitaire S_n, suivant le modèle binomial introduit précédemment.

La valeur initiale du portefeuille est donc :

$$\boxed{V_0(P) = M + \Delta S_0.}$$

Si l'investisseur conserve la même composition du portefeuille pendant n périodes, sa valeur devient :

$$\boxed{V_n(P) = M(1+r)^n + \Delta S_n.}$$

Remarque 4. *Les quantités M et Δ peuvent être négatives.*

Lorsque $M < 0$, l'investisseur emprunte de l'argent au taux sans risque.

*Lorsque $\Delta < 0$, il effectue une **vente à découvert** (short selling) : il vend des actions empruntées, qu'il devra restituer ultérieurement.*

Remarque 5. *L'investisseur peut également modifier la composition de son portefeuille au cours du temps.*

On note alors $P_n = (M_n, \Delta_n)$, où les quantités détenues dépendent de l'instant n.

*Lorsque ces ajustements visent à réduire l'exposition du portefeuille aux variations du sous-jacent, on parle de **couverture dynamique**.*

Dans ce cas, le montant investi dans l'actif sans risque doit également être ajusté pour financer les transactions.

Exemple : le portefeuille répliquant.

Comme son nom l'indique, un portefeuille répliquant reproduit exactement le payoff d'un produit dérivé, quel que soit le scénario réalisé par le sous-jacent.

Considérons un call européen de strike K et d'échéance $T = 1$, dans un modèle binomial à une période.

Nous cherchons un portefeuille $P = (M, \Delta)$ dont la valeur finale est égale au payoff du call.

Autrement dit :

$$V_1(P) = (S_1 - K)^+.$$

Puisque le prix de l'action peut augmenter ou diminuer, nous obtenons le système :

$$\boxed{\begin{cases} M(1+r) + \Delta u S_0 = (uS_0 - K)^+, \\ M(1+r) + \Delta d S_0 = (dS_0 - K)^+. \end{cases}}$$

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues M et Δ.

En soustrayant les deux équations, on obtient :

$$\boxed{\Delta = \frac{(uS_0 - K)^+ - (dS_0 - K)^+}{S_0(u-d)}.}$$

Puis :

$$\boxed{M = \frac{(uS_0 - K)^+ - \Delta u S_0}{1+r}.}$$

Nous avons ainsi construit un portefeuille dont la valeur à l'échéance reproduit exactement celle du call, dans les deux scénarios possibles.

C'est ce qu'on appelle un **portefeuille répliquant**.

Mais une question se pose alors : si une option et un portefeuille offrent exactement les mêmes gains futurs, pourraient-ils avoir des prix différents aujourd'hui ?

Pour répondre à cette question, introduisons l'une des notions fondamentales de la finance : l'arbitrage.

2.4 L'arbitrage : gagner sans prendre de risque ?

En finance, une opportunité d'arbitrage désigne une stratégie d'investissement permettant de réaliser un gain sans risque de perte et sans investissement initial net.

Plus précisément, on appelle **arbitrage** un portefeuille dont la valeur initiale est nulle et dont la valeur finale est presque sûrement positive ou nulle, avec une probabilité strictement positive de réaliser un gain :

$$\boxed{V_0 = 0, \qquad \mathbb{P}(V_1 \geq 0) = 1, \qquad \mathbb{P}(V_1 > 0) > 0.}$$

Autrement dit, l'investisseur ne mobilise aucun capital net au départ, ne peut pas perdre d'argent et possède une chance strictement positive d'en gagner.

L'hypothèse d'**absence d'arbitrage** constitue ainsi l'un des principes fondamentaux des mathématiques financières. Elle permet notamment d'établir des contraintes sur les prix des actifs.

2.5 Quand l'arbitrage devient-il impossible ?

L'hypothèse d'absence d'arbitrage impose des contraintes sur les coefficients de notre modèle binomial.

À retenir

Dans notre modèle, en supposant que les deux scénarios ont une probabilité strictement positive :

$$\boxed{\text{Absence d'arbitrage} \iff d < 1 + r < u.}$$

La démonstration complète ne sera pas présentée dans ce document, mais essayons de comprendre intuitivement pourquoi cette condition est nécessaire.

Si $1 + r \leq d$:

Même dans le scénario le plus défavorable, l'action rapporte au moins autant que l'actif sans risque !

Un investisseur pourrait alors emprunter S_0 au taux sans risque et utiliser cette somme pour acheter une action.

Son portefeuille aurait une valeur initiale nulle :

$$V_0 = -S_0 + S_0 = 0.$$

À la période suivante :

$$V_1 = \begin{cases} S_0(u - (1 + r)) > 0 & \text{en cas de hausse,} \\ S_0(d - (1 + r)) \geq 0 & \text{en cas de baisse.} \end{cases}$$

Il ne peut donc pas perdre d'argent et réalise un gain strictement positif dans le scénario de hausse.

C'est une opportunité d'arbitrage !

Si $u \leq 1 + r$:

Cette fois, l'actif sans risque rapporte au moins autant que l'action, même dans le scénario le plus favorable.

Un investisseur pourrait alors vendre une action à découvert et placer les S_0 obtenus dans l'actif sans risque.

Le même raisonnement permet de construire une opportunité d'arbitrage.

Ainsi, pour éviter ces opportunités, le rendement sans risque doit se situer strictement entre les deux rendements possibles de l'action :

$$\boxed{d < 1 + r < u.}$$

Mais l'absence d'arbitrage nous permet d'aller encore plus loin : elle permet de déterminer le prix d'une option !

À retenir

En l'absence d'arbitrage, le prix d'une option réplicable est égal à la valeur initiale de son portefeuille répliquant :

$$\boxed{C_0 = V_0(P_{\text{rep}}).}$$

Démonstration :

Montrons que si le prix de l'option diffère de la valeur initiale de son portefeuille répliquant, alors il existe une opportunité d'arbitrage.

Premier cas : $C_0 > V_0(P_{\text{rep}})$.

L'option est plus chère que le portefeuille qui reproduit exactement son payoff.

Je peux alors :

- Vendre un call au prix C_0.
- Construire son portefeuille répliquant au coût $V_0(P_{\text{rep}})$.
- Placer la différence $C_0 - V_0(P_{\text{rep}})$ au taux sans risque.

À l'échéance, deux scénarios sont possibles.

Si $S_1 > K$:

- Le détenteur du call exerce son droit. Ma position vendeuse me coûte $S_1 - K$.
- Mon portefeuille répliquant rapporte exactement $S_1 - K$.

Les deux montants se compensent.

Il me reste donc :

$$\boxed{(C_0 - V_0(P_{\text{rep}}))(1 + r) > 0.}$$

Si $S_1 \leq K$:

— Le call n'est pas exercé : son payoff est nul.
— Le portefeuille répliquant possède également une valeur finale nulle.

Je réalise donc le même gain :

$$\boxed{(C_0 - V_0(P_{\text{rep}}))(1+r) > 0.}$$

Dans les deux scénarios, j'obtiens un gain strictement positif sans investissement initial net !

Il s'agit donc d'une opportunité d'arbitrage.

Deuxième cas : $C_0 < V_0(P_{\text{rep}})$**.**

Cette fois, l'option est moins chère que le portefeuille répliquant.

Je peux alors :

— Acheter un call au prix C_0.
— Vendre à découvert le portefeuille répliquant et recevoir $V_0(P_{\text{rep}})$.
— Placer la différence $V_0(P_{\text{rep}}) - C_0$ au taux sans risque.

À l'échéance, le payoff du call compense exactement la valeur finale de ma position vendeuse sur le portefeuille répliquant.

Quel que soit le scénario, je réalise donc un gain :

$$\boxed{(V_0(P_{\text{rep}}) - C_0)(1+r) > 0.}$$

Il s'agit, là encore, d'une opportunité d'arbitrage.

Nous avons donc montré que les hypothèses $C_0 > V_0(P_{\text{rep}})$ et $C_0 < V_0(P_{\text{rep}})$ conduisent toutes deux à une opportunité d'arbitrage.

Par conséquent, en l'absence d'arbitrage :

$$\boxed{C_0 = V_0(P_{\text{rep}}) = M + \Delta S_0.}$$

Nous venons ainsi de déterminer le prix théorique d'une option à partir d'un portefeuille composé uniquement d'un actif risqué et d'un actif sans risque.
Mais construire un portefeuille répliquant chaque fois que l'on souhaite valoriser une option peut vite devenir fastidieux, notamment lorsque le nombre de périodes augmente.

Et s'il existait une méthode permettant de calculer directement le prix d'une option à partir de son gain futur ?

C'est précisément ce que permet la mesure de probabilité risque-neutre, dont l'existence est garantie par l'absence d'arbitrage dans notre modèle.

2.6 La mesure risque-neutre

À retenir

Une mesure de probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ est une mesure équivalente à la probabilité réelle $\mathbb{P}$, sous laquelle les prix actualisés des actifs négociés sont des martingales.
Autrement dit, dans notre modèle :

$$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\dfrac{S_{n+1}}{B_{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right] = \dfrac{S_n}{B_n}. \end{cases}$$

Puisque $B_{n+1} = (1+r)B_n$, la deuxième condition est équivalente à :

$$\boxed{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = (1+r)S_n.}$$

Remarque 6. *L'équivalence entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ signifie que les deux mesures attribuent une probabilité nulle aux mêmes événements.*

Ainsi, un scénario possible sous la probabilité réelle reste possible sous la mesure risque-neutre.

En revanche, les probabilités attribuées aux différents scénarios peuvent changer.

Remarque 7. *Dans un marché financier fini, l'absence d'arbitrage garantit l'existence d'au moins une mesure risque-neutre équivalente à la probabilité réelle.*

Remarque 8. *Un marché est dit **complet** si tout payoff contingent peut être reproduit exactement par un portefeuille autofinancé composé des actifs disponibles sur le marché.*

Dans un marché fini sans arbitrage, la complétude garantit l'unicité de la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$.

Application à notre modèle binomial à une période.

On pose :

- $\mathbb{Q}(H) = q$;
- $\mathbb{Q}(T) = 1 - q$;
- $S_1(H) = uS_0$;
- $S_1(T) = dS_0$;
- $C_1(H) = (S_1(H) - K)^+$;
- $C_1(T) = (S_1(T) - K)^+$.

Sous la mesure risque-neutre, le prix actualisé de l'action est une martingale.

On a donc :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] = (1+r)S_0.$$

Or, par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] = quS_0 + (1-q)dS_0.$$

Ainsi :

$$quS_0 + (1-q)dS_0 = (1+r)S_0.$$

En simplifiant :

$$qu + (1-q)d = 1 + r.$$

On obtient alors :

$$\boxed{q = \frac{1+r-d}{u-d} \in (0,1).}$$

La condition $d < 1 + r < u$ garantit que q est bien une probabilité strictement comprise entre 0 et 1.

De plus, puisque les prix actualisés des portefeuilles autofinancés sont également des martingales sous $\mathbb{Q}$, nous avons :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1] = (1+r)V_0.$$

Or, dans notre marché complet, le portefeuille répliquant vérifie :

$$V_0 = C_0 \qquad \text{et} \qquad V_1 = C_1.$$

On en déduit :

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_1].}$$

Autrement dit :

$$\boxed{C_0 = \frac{qC_1(H) + (1-q)C_1(T)}{1+r}.}$$

Ainsi, au lieu de reconstruire explicitement un portefeuille répliquant chaque fois que l'on souhaite valoriser une option, on peut directement calculer l'espérance actualisée de son payoff sous $\mathbb{Q}$.

Généralisation à plusieurs périodes.

Considérons maintenant une option européenne d'échéance N dans notre modèle binomial.

À chaque instant $n \in \{0, \dots, N-1\}$, le portefeuille répliquant peut être réajusté en fonction de l'évolution du sous-jacent.

On note Δ_n le nombre d'actions détenues entre les instants n et $n+1$.

Le portefeuille étant autofinancé, sa valeur évolue selon :

$$\boxed{V_{n+1} = (V_n - \Delta_n S_n)(1+r) + \Delta_n S_{n+1}.}$$

Pour répliquer l'option, on choisit :

$$\boxed{\Delta_n = \frac{C_{n+1}(H) - C_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)}.}$$

Les valeurs H et T désignent ici les deux branches possibles à partir du noeud considéré à l'instant n.

On obtient alors, à chaque instant :

$$\boxed{V_n = C_n.}$$

Puisque le prix actualisé du portefeuille répliquant est une martingale sous $\mathbb{Q}$, on a :

$$\boxed{C_n = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_{n+1} \mid \mathcal{F}_n].}$$

En appliquant cette relation successivement et en utilisant la propriété de la tour des espérances conditionnelles, on obtient :

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_N].}$$

Dans le cas d'un call européen :

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_N - K)^+].}$$

Nous avons ainsi généralisé notre formule de valorisation risque-neutre à un nombre quelconque de périodes.

3. Du discret au continu : vers Black-Scholes

Maintenant que nous avons compris comment valoriser une option dans un modèle discret, une question se pose naturellement : que devient ce modèle lorsque les périodes deviennent de plus en plus courtes ?

Autrement dit, peut-on faire émerger un modèle en temps continu à partir de notre modèle binomial ?

Pour répondre à cette question, introduisons le modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

3.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Considérons une action de prix initial S_0, sur laquelle porte une option européenne d'échéance $T > 0$.

Nous divisons l'intervalle $[0, T]$ en N périodes de même longueur :

$$\boxed{h = \frac{T}{N}.}$$

Notre objectif sera de faire tendre N vers l'infini, de sorte que :

$$N \longrightarrow +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad h \longrightarrow 0.$$

Dans le modèle binomial étudié précédemment, le prix de l'action pouvait augmenter ou diminuer à chaque période.

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR) reprend cette idée, mais introduit une particularité essentielle : les facteurs de hausse et de baisse dépendent désormais de la longueur des périodes.

Soit $\sigma > 0$ la volatilité de l'action.

On pose :

À retenir

Dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, les facteurs de hausse et de baisse sont définis par :

$$\boxed{u_N = e^{\sigma\sqrt{h}}, \qquad d_N = e^{-\sigma\sqrt{h}}.}$$

Ainsi, à chaque période :

$$S_{k+1}^{(N)} = \begin{cases} u_N S_k^{(N)} & \text{en cas de hausse,} \\ d_N S_k^{(N)} & \text{en cas de baisse.} \end{cases}$$

Pourquoi choisir des facteurs qui dépendent de $\sqrt{h}$?

Lorsque le nombre de périodes augmente, leur durée diminue. Il est donc naturel que l'amplitude des variations du prix de l'action diminue également.

Remarque 9. *On remarque que :*

$$\boxed{u_N d_N = 1.}$$

Ainsi, une hausse suivie d'une baisse ramène le prix de l'action à sa valeur initiale.

En effet :

$$u_N d_N S_k^{(N)} = S_k^{(N)}.$$

Cette propriété rend l'arbre binomial recombinant : deux trajectoires comportant les mêmes nombres de hausses et de baisses conduisent au même prix.

3.2 Du taux discret au taux continu

Intéressons-nous maintenant à l'évolution de l'actif sans risque.

Dans notre modèle discret, nous avions :

$$B_n = B_0(1 + r_h)^n,$$

où r_h représentait le taux d'intérêt sans risque par période.

Mais lorsque la durée des périodes change, le taux par période doit également être adapté.

Supposons que r désigne un taux d'intérêt annuel.

Si l'on divise une année en N périodes, le taux proportionnel associé à chaque période est $\frac{r}{N}$.

Avec $B_0 = 1$, après une année :

$$B_N^{(N)} = \left(1 + \frac{r}{N}\right)^N.$$

Or, nous connaissons la limite classique :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \left(1 + \frac{r}{N}\right)^N = e^r.}$$

Pour une échéance quelconque T, en posant $h = T/N$, nous obtenons :

$$B_N^{(N)} = \left(1 + \frac{rT}{N}\right)^N.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} B_N^{(N)} = e^{rT}.}$$

On retrouve donc l'expression de l'actif sans risque dans le modèle continu :

$$\boxed{B_t = e^{rt}.}$$

Remarque 10. *En temps continu, sur une période de longueur h, le facteur de capitalisation sans risque est :*

$$\boxed{e^{rh}.}$$

Nous utiliserons désormais cette convention dans notre modèle CRR.

Le taux effectif correspondant sur une période est alors :

$$r_h = e^{rh} - 1.$$

3.3 La mesure risque-neutre dans le modèle CRR

Nous avons vu précédemment que l'absence d'arbitrage permet d'introduire une mesure de probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$.

Dans le modèle binomial, la probabilité de hausse sous cette mesure est donnée par :

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d}.$$

Dans notre nouveau modèle, les facteurs de hausse et de baisse dépendent de N, et le facteur de capitalisation sans risque sur une période est e^{rh}.

La probabilité risque-neutre de hausse devient donc :

$$q_N = \frac{e^{rh} - d_N}{u_N - d_N}.$$

En remplaçant u_N et d_N par leurs expressions :

À retenir

La probabilité de hausse sous la mesure risque-neutre dans le modèle CRR est :

$$\boxed{q_N = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}.}$$

Pour que cette quantité définisse une probabilité strictement comprise entre 0 et 1, nous devons avoir :

$$d_N < e^{rh} < u_N.$$

Autrement dit :

$$e^{-\sigma\sqrt{h}} < e^{rh} < e^{\sigma\sqrt{h}}.$$

Cette condition correspond exactement à l'absence d'arbitrage dans notre modèle binomial.

Pour tout r fixé et $\sigma > 0$, elle est satisfaite dès que h est suffisamment petit.

Nous disposons désormais d'un modèle binomial dont les paramètres dépendent du nombre de périodes.

Il ne nous reste plus qu'à étudier ce qui se passe lorsque N tend vers l'infini.

3.4 Du modèle binomial à la loi lognormale

Nous cherchons maintenant à retrouver la loi du prix de l'action dans le modèle de Black-Scholes, en partant du modèle discret de Cox-Ross-Rubinstein.

Expression du prix à l'échéance.

Soit N_+ le nombre de fois où l'action augmente pendant les N périodes.

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}_N$, nous avons :

$$N_+ \sim \mathcal{B}(N, q_N).$$

Le prix final de l'action s'écrit :

$$S_N^{(N)} = S_0 u_N^{N_+} d_N^{N-N_+}.$$

En remplaçant les facteurs du modèle CRR :

$$S_N^{(N)} = S_0 e^{\sigma\sqrt{h}N_+} e^{-\sigma\sqrt{h}(N-N_+)}.$$

D'où :

$$\boxed{S_N^{(N)} = S_0 e^{\sigma\sqrt{h}(2N_+-N)}.}$$

En prenant le logarithme :

$$\boxed{\ln\left(\frac{S_N^{(N)}}{S_0}\right) = \sigma\sqrt{h}(2N_+ - N).}$$

Convergence en loi du logarithme du prix.

On pose :

$$Y_N = \ln\left(\frac{S_N^{(N)}}{S_0}\right).$$

On introduit une famille de variables aléatoires indépendantes $(X_i^{(N)})_{1\leq i\leq N}$ telles que :

$$X_i^{(N)} = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } q_N, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1-q_N. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{Y_N = \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{N} X_i^{(N)}.}$$

Calculons son espérance et sa variance.

Puisque :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}[X_i^{(N)}] = 2q_N - 1,$$

on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}[Y_N] = \sigma\sqrt{h}N(2q_N-1).}$$

De même :

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}_N}(X_i^{(N)}) = 1-(2q_N-1)^2 = 4q_N(1-q_N).$$

Par indépendance :

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}_N}(Y_N) = \sigma^2 hN\, 4q_N(1-q_N).$$

Comme $Nh = T$:

$$\boxed{\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}_N}(Y_N) = 4\sigma^2 T q_N(1-q_N).}$$

Comportement asymptotique.

Rappelons que :

$$q_N = \frac{e^{rh}-e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}}.$$

Un développement limité lorsque $h \to 0$ donne :

$$\boxed{q_N = \frac{1}{2} + \frac{r - \sigma^2/2}{2\sigma}\sqrt{h} + O(h).}$$

On en déduit :

$$q_N \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}_N}(Y_N) \longrightarrow \sigma^2 T.}$$

De plus :

$$2q_N - 1 = \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{h} + O(h).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}[Y_N] &= \sigma N h \left(\frac{r - \sigma^2/2}{\sigma} + O(\sqrt{h})\right) \\ &\longrightarrow \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T.\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}[Y_N] &\longrightarrow \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \\ \mathrm{Var}_{\mathbb{Q}_N}(Y_N) &\longrightarrow \sigma^2 T.\end{aligned}}$$

Application du théorème central limite.

Pour chaque N, les variables $(X_i^{(N)})_{1 \le i \le N}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Comme elles sont bornées et que $q_N \to 1/2$, les conditions d'un théorème central limite pour tableaux triangulaires sont satisfaites.

Ainsi :

$$\frac{Y_N - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}[Y_N]}{\sqrt{\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}_N}(Y_N)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

D'après le théorème de Slutsky et les convergences précédentes :

À retenir

Lorsque N tend vers l'infini :

$$\boxed{\ln\left(\frac{S_N^{(N)}}{S_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right).}$$

Puis, en appliquant le théorème de l'application continue à la fonction exponentielle, on obtient :

$$\boxed{S_N^{(N)} \xrightarrow{\mathcal{L}} S_0 e^Y, \qquad Y \sim \mathcal{N}\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right).}$$

Puisque Y suit une loi normale, on peut représenter la variable aléatoire limite sous la forme :

$$\boxed{S_T = S_0 e^{T(r-\frac{\sigma^2}{2})+\sigma\sqrt{T}Z}, \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1).}$$

Nous retrouvons ainsi la loi lognormale du prix de l'action à l'échéance dans le modèle de Black-Scholes.

Retrouvons maintenant la formule de Black-Scholes.

Dans le modèle limite, le prix d'un call européen de strike K et d'échéance T est donné par :

$$C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T-K)^+].$$

En utilisant la fonction indicatrice :

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T-K)^+] \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T-K)\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}] \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}] - Ke^{-rT}\mathbb{Q}(S_T>K) \\ &= A - B. \end{aligned}$$

Avec :

$$A = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}],$$

et

$$B = Ke^{-rT}\mathbb{Q}(S_T>K).$$

Calcul de B.

$$\begin{aligned} B &= Ke^{-rT}\mathbb{Q}(S_T > K) \\ &= Ke^{-rT}\mathbb{Q}\left(S_0 e^{T(r-\sigma^2/2)+\sigma\sqrt{T}Z} > K\right) \\ &= Ke^{-rT}\mathbb{Q}(Z > -d_2) \\ &= Ke^{-rT}(1-\Phi(-d_2)) \\ &= \boxed{Ke^{-rT}\Phi(d_2)}, \quad \text{par symétrie de la loi normale.} \end{aligned}$$

Avec :

$$\boxed{d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}}$$

et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Calcul de A.

$$\begin{aligned} A &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T \mathbb{1}_{\{S_T>K\}}] \\ &= \frac{S_0 e^{-\sigma^2 T/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T}z - z^2/2}\, dz, \quad \text{car } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-(z-\sigma\sqrt{T})^2/2}\, dz, \quad \text{en complétant le carré} \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy, \quad \text{avec } y = z - \sigma\sqrt{T} \\ &= \boxed{S_0\Phi(d_1)}, \quad \text{par symétrie de la loi normale.} \end{aligned}$$

Où :

$$\boxed{d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.}$$

Nous obtenons finalement la célèbre formule de Black-Scholes :

À retenir

Le prix d'un call européen sur une action ne versant aucun dividende est :

$$\boxed{C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Ainsi, en partant d'un modèle où le prix d'une action ne peut que monter ou descendre à chaque période, nous avons retrouvé, à la limite, l'une des formules les plus célèbres des mathématiques financières. Le hasard, loin de rendre toute valorisation impossible, devient ici l'outil même qui permet de déterminer le prix d'une option.

3.5 Que nous dit réellement Black-Scholes ?

Nous venons de retrouver la célèbre formule de Black-Scholes :

$$\boxed{C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2).}$$

Mais au-delà des mathématiques, que nous apprend réellement cette formule ?

Elle permet de déterminer le prix théorique d'un call européen à partir de cinq paramètres :

- S_0 : le prix actuel de l'action ;
- K : le prix d'exercice de l'option ;
- T : le temps restant jusqu'à l'échéance ;
- r : le taux d'intérêt sans risque ;
- σ : la volatilité de l'action.

Le fait remarquable est que ce prix ne dépend pas du rendement espéré réel de l'action !

En effet, grâce à l'absence d'arbitrage et à la mesure risque-neutre, nous pouvons valoriser une option sans avoir à prédire si le marché va monter ou descendre.

Le rôle fondamental de la volatilité.

Parmi ces paramètres, la volatilité joue un rôle particulièrement important.

Plus la volatilité est élevée, plus les fluctuations possibles du prix de l'action sont importantes.

Or, le détenteur d'un call bénéficie des fortes hausses du sous-jacent, tout en ayant la possibilité de ne pas exercer son option en cas de baisse.

Ainsi, toutes choses égales par ailleurs, une augmentation de la volatilité entraîne une augmentation du prix d'un call dans le modèle de Black-Scholes.

Cette sensibilité est mesurée par une grandeur appelée **vega** :

$$\boxed{\text{Vega} = \frac{\partial C_0}{\partial \sigma}.}$$

Dans le modèle de Black-Scholes :

$$\text{Vega} = S_0\sqrt{T}\,\varphi(d_1) > 0,$$

où φ désigne la densité de la loi normale centrée réduite.

Remarque 11. *On peut donc acheter une option non seulement parce qu'on anticipe une hausse de l'action, mais également parce qu'on anticipe une augmentation de sa volatilité.*

La direction du marché n'est donc pas la seule source d'opportunités pour un investisseur en options !

La formule de Black-Scholes constitue ainsi un outil fondamental pour valoriser les options et analyser leur sensibilité aux différents paramètres du marché.

3.6 Black-Scholes : un modèle parfait pour un marché imparfait ?

Aussi élégante soit-elle, la formule de Black-Scholes repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices qui ne sont pas toujours vérifiées sur les marchés réels.

Une volatilité supposée constante.

Le modèle suppose que la volatilité σ reste constante au cours du temps.

Or, dans la réalité, les marchés connaissent des périodes calmes et des périodes de forte turbulence.

La volatilité peut donc évoluer considérablement, notamment lors de crises financières ou d'annonces économiques importantes.

Des trajectoires continues.

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix de l'action suit un mouvement brownien géométrique, dont les trajectoires sont continues.

En pratique, les prix peuvent subir des variations brutales, appelées *sauts*, notamment à la suite d'événements imprévus.

Le modèle ne représente donc pas directement ces discontinuités.

Un marché idéalisé.

Black-Scholes suppose également un marché sans coûts de transaction, dans lequel les actifs peuvent être achetés et vendus librement.

La couverture du risque peut, en théorie, être réajustée continuellement.

Mais dans la réalité, chaque transaction peut engendrer des frais, et les ajustements ne peuvent pas être réalisés en permanence.

Le sourire de volatilité.

L'une des limites les plus connues du modèle apparaît lorsque l'on observe les prix des options sur les marchés.

En inversant la formule de Black-Scholes, on peut déterminer la volatilité qui permet de retrouver le prix observé d'une option.

C'est ce qu'on appelle la **volatilité implicite**.

Si le modèle décrivait parfaitement le marché avec une volatilité constante, les options de même sous-jacent et de même maturité devraient conduire à une même valeur de σ, quel que soit leur strike.

Or, ce n'est généralement pas le cas !

Les volatilités implicites varient avec le prix d'exercice, formant ce qu'on appelle un *volatility smile* ou *volatility skew*.

Remarque 12. *Le modèle de Black-Scholes n'est donc pas une description parfaite des marchés.*

Il constitue néanmoins un modèle de référence en finance quantitative, notamment pour la valorisation, la couverture des risques et l'analyse des volatilités implicites.

4. Conclusion

Partis d'une simple marche aléatoire, dans laquelle le prix d'une action ne pouvait que monter ou descendre, nous avons progressivement construit un modèle capable de donner un prix théorique à une option.

L'absence d'arbitrage, les portefeuilles répliquants et la mesure risque-neutre nous ont permis de valoriser l'incertitude. Puis, en faisant tendre le nombre de périodes vers l'infini, nous avons retrouvé la loi lognormale du prix de l'action et la célèbre formule de Black-Scholes.

Bien que les marchés réels soient plus complexes que nos modèles, cette approche illustre une idée fondamentale de la finance quantitative : il n'est pas nécessaire de prédire l'avenir pour pouvoir donner un prix au risque.